Элементы тензорного анализа Г. Крона

Структура:
1. Элементы алгебры n-матриц.
2. Разложение в степенной ряд.
3. Обращенный степенной ряд.
4. Тензор преобразования.
5. Инвариантность форм.
6. Мультитензоры.
7. Анализ и синтез сетей.

1. Элементы алгебры n-матриц

Система обозначений

Для представления n-матриц используются два типа обозначений.
«Прямое обозначение», в котором каждая n-матрица независимо от ее размерности представляется одним символом, называемым базовой буквой.
«Индексное обозначение», в котором каждая n-матрица также обозначается одним символом A – базовой буквой, но к ней, кроме того, приписываются еще индексы, представляющие направления, по которым расположены компоненты матрицы. В частности, 1-матрица имеет один индекс — $A\alpha$; 2-матрица имеет два индекса — $A\alpha\beta$; 3-матрица — три индекса — $A\alpha\beta\gamma$; 0-матрица не имеет индексов — A.
Базовая буква A, представляющая n-матрицу, в общем случае имеет число индексов, соответствующее числу направлений, по которым расположены ее компоненты.

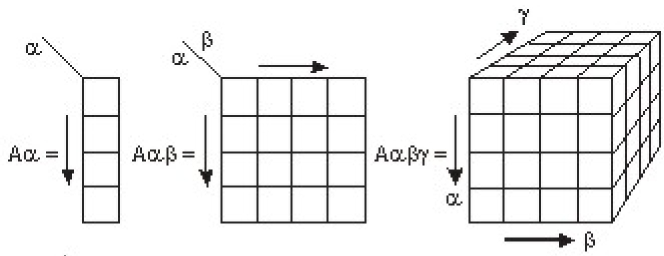


Рис. 1. Расположение индексов

При представлении n-матрицы с помощью нескольких индексов, скажем $A\alpha\beta\gamma$, в общем случае (рис. 1) первый индекс обозначает строки; второй индекс — столбцы; третий индекс — слои, параллельные плоскости листа.
Однако, поскольку индексы прочно связаны со стрелками, то порядок представления при наличии стрелки не имеет особого значения. Она показывает, относится ли первый индекс к строке или столбцу.

«Фиксированные» и «скользящие» индексы

I. Каждый элемент на рис. 16 имеет определенное обозначение (a, b, c, d), чтобы с ним можно было работать отдельно. Аналогично каждая строка, столбец и слой n-матрицы, как показано, имеют присвоенные им отличительные наименования. Эти индивидуальные наименования называются «фиксированными» индексами и пишутся рядом со строкой, столбцом или слоем.
Чтобы обращаться ко всем элементам вместе, в дополнение к «фиксированным» индексам a, b, c, d, ... в индексные обозначения вводится другой набор индексов, который представляет все фиксированные индексы. Такие коллективные индексы называются «скользящими» (или «текущими») и обозначаются греческими буквами (α, β, γ, …). Таким

образом, скользящий индекс обозначает все фиксированные значения a, b, c, d, …; этим же свойством обладают β и γ. Например, $A\alpha$ представляет все компоненты 1-матрицы A, тогда как Ab — один компонент, а именно второй в строке.
Как показано на рис. 15, для 2-матрицы в верхнем левом углу, рядом с наклонной чертой, в соответствующем месте помещаются два скользящих индекса. Для 3-матрицы вдоль ребер куба изображаются три стрелки, а затем рядом с каждой стрелкой помещается скользящий индекс.
II. Если все индексы скользящие, например для $A\alpha\beta$, то они представляют сразу все компоненты n-матрицы. Если же один или более индексов фиксированные, как в $Ac\beta$ или $Aad\gamma$, то это означает, что из n-матрицы выделены отдельные строка, столбец или слой (рис. 2).
Например, $A\alpha d\gamma$ представляет 2-матрицу, вырезанную из 3-матрицы. Наличие трех индексов свидетельствует о том, что исходная матрица A — это 3-матрица. Два переменных индекса α и γ показывают, что вырезана 2-матрица и что она перпендикулярна плоскости листа (скользящие индексы — 1-й и 3-й).
Постоянный индекс d показывает, что 2-матрица — последняя из четырех 2-матриц.

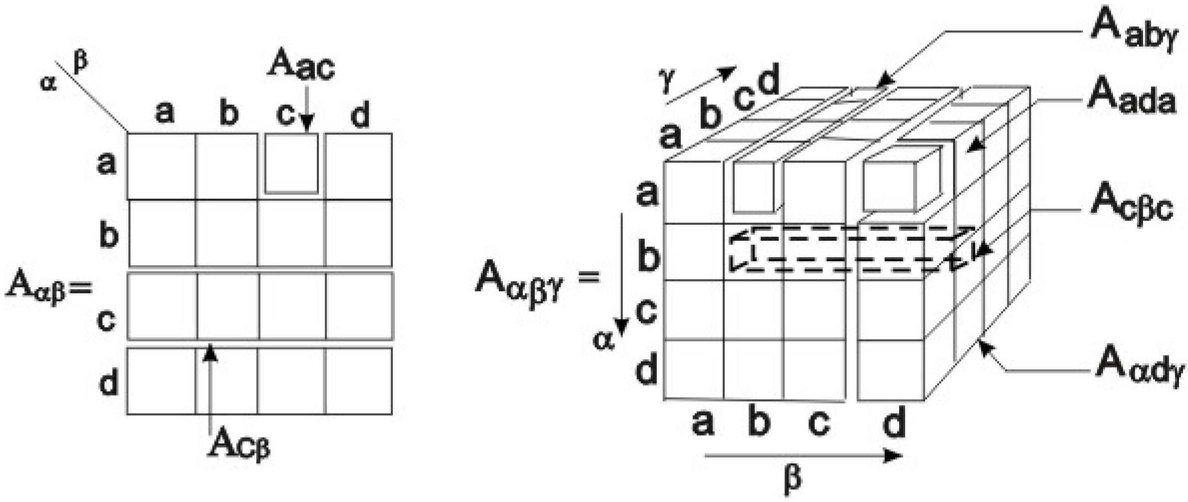


Рис. 2. Представление различных частей n-матрицы

Отдельные компоненты представляются присвоенными им фиксированными индексами, например $Ab = 5$ или $Abd = 7$, при этом показано, что число 7 принадлежит строке b и столбцу d.
Если используется прямое обозначение, то скользящие индексы не указываются. Однако фиксированные индексы *a, b, c, d* еще сохраняются и выделяются жирным шрифтом (***a*, *b*, *c*, *d***) рядом с компонентами. Следовательно, 1-матрицу и 2-матрицу запишем соответственно так:

$$\boldsymbol{e} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}, \qquad \boldsymbol{Z} = \begin{array}{c|cccc} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \boldsymbol{a} & 4 & 1 & 3 & 2 \\ \boldsymbol{b} & 5 & 7 & 6 & 8 \\ \boldsymbol{c} & 9 & 8 & 5 & 6 \\ \boldsymbol{d} & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Причем постоянные индексы выделены жирным шрифтом, а скользящие опущены. Частичные (неполные n-матрицы) (рис. 2) можно изображать в прямом обозначении только с помощью обозначений, специально вводимых для каждого конкретного случая.

Таким образом, различие между скользящим и индексным обозначением состоит в том, что скользящие индексы опускаются при использовании прямых обозначений. Для отличия их от обычных величин вместо скользящих индексов используется выделение жирным шрифтом.

Представление *n*-матриц более высоких размерностей

I. С помощью фиксированных и скользящих индексов 4-матрицу $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$, представляющую k^4 величин, можно представить графически посредством k кубов (так как $k^4 = k \times k^3$), если последний скользящий индекс заменить рядом постоянных индексов *a, b, c, d* (рис. 3).
Поскольку каждый куб можно изобразить на листе в виде k 2-матриц, то $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ может быть изображена на листе в виде k^2 2-матриц ($k^4 = k^2 \times k^2$).

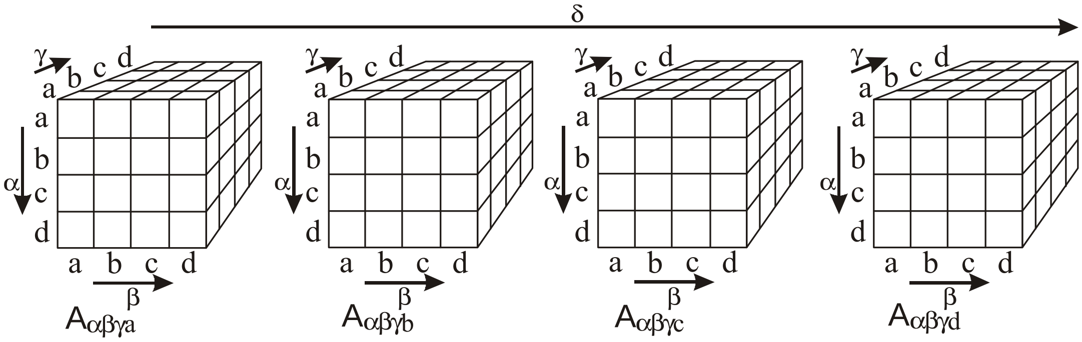


Рис. 3. Представление 4-матрицы $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ как строки из k 3-матриц

Подобным образом 5-матрицу $A_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ можно представить графически с помощью k^2 кубов (так как $k^5 = k^2 \times k^3$) (рис. 4).
Кроме того, ее можно представить в виде k^3 2-матриц, расчленив каждый куб на k 2-матриц.

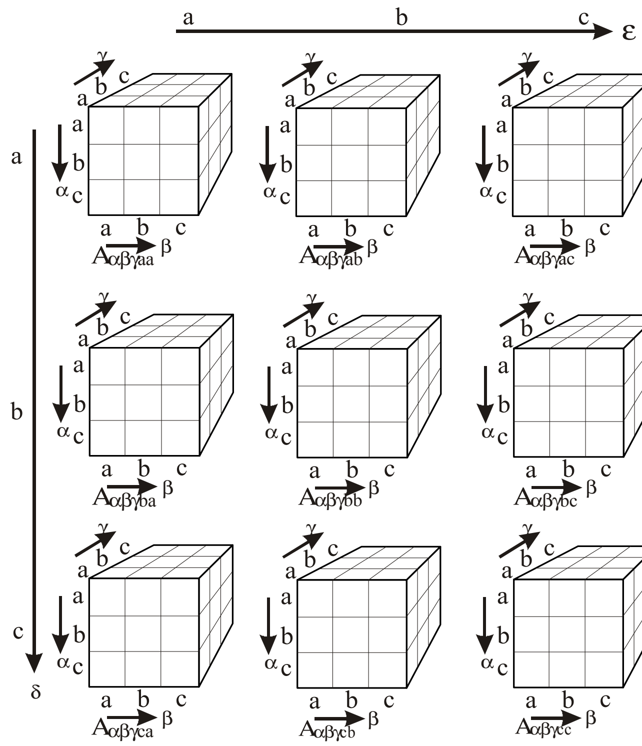


Рис. 4. Представление 5-матрицы $A_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ в виде множества k^2 3-матриц

В материалах портала все n-матрицы при $n > 2$ изображены в виде множеств 2-матриц, т. е. $A_{\alpha\beta\gamma}$ будем представлять как k 2-матриц, $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — k^2 2-матриц и т.д.
Метод представления n-матриц, подобных $A_{\alpha\beta\gamma}$, в виде куба, в виде k 2-матриц или в виде k^3 чисел является делом вкуса. Опыт показал, что расчленение n-матриц на 2-матрицы и такое их представление, найденное экспериментально, наиболее удобно для быстрого и формализованного решения задач. Могут быть использованы и другие способы представления матриц. Предложенный здесь метод представления n-матриц совершенно независим от изложенных ниже понятий и методологии.

ДЕЙСТВИЯ с *n*-МАТРИЦАМИ

Рассмотрим следующие действия: сложение, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование.
При каждом действии между двумя n-матрицами появляется знак равенства.
Две n-матрицы размерности n равны, если равны их соответствующие компоненты. Например:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{-3} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{-3} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

равны, т. е. $A = B,$ поскольку каждый компонент первой матрицы равен соответствующему компоненту второй.

Сложение

I. *Две n-матрицы одной размерности складываются суммированием их соответствующих компонент.*

Сумма двух *1-матриц* определяется так:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{-2} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1-2} & \multicolumn{1}{c|}{2+3} & \multicolumn{1}{c|}{3+0} & \multicolumn{1}{c|}{4+5} \\ \hline \end{array} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{9} \\ \hline \end{array} \tag{2}$$

Сумма двух *2-матриц* равна

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \cline{2-5} \boldsymbol{a} & 6 & 5 & -7 & 4 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{b} & -8 & 1 & -9 & 5 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{c} & -4 & 7 & 8 & 3 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{d} & 2 & 0 & 6 & 9 \\ \cline{2-5} \end{array} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \cline{2-5} \boldsymbol{a} & 6 & -4 & 9 & 2 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{b} & 1 & 8 & 7 & 3 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{c} & 5 & -2 & 4 & -5 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{d} & 7 & 3 & 6 & 1 \\ \cline{2-5} \end{array}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \cline{2-5} \boldsymbol{a} & 6+6 & 5-4 & -7+9 & 4+2 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{b} & -8+1 & 1+8 & -9+7 & 5+3 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{c} & -4+5 & 7-2 & 8+4 & 3-5 \\ \cline{2-5} \boldsymbol{d} & 2+7 & 0+3 & 6+6 & 9+1 \\ \cline{2-5} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{a}} & \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{b}} & \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{c}} & \multicolumn{1}{c}{\boldsymbol{d}} \\ \hline 12 & 1 & 2 & 6 \\ \hline -7 & 9 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 5 & 12 & -2 \\ \hline 9 & 3 & 12 & 10 \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

Может оказаться, что у двух данных матриц одни фиксированные индексы одинаковые, а другие различные. В таких случаях предполагается, что по отсутствующим индексам компоненты равны нулю, и поэтому они вписываются до операции.

Умножение 1-матриц

Чтобы научиться умножать n-матрицы различных размерностей, достаточно запомнить, как перемножаются две 1-матрицы. Они умножаются перемножением соответствующих друг другу компонент и последующего сложения полученных произведений. Результатом этой операции является 0-матрица или скаляр.

Например, если

$$\boldsymbol{e} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline \end{array} \qquad \boldsymbol{i} = \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \tag{4}$$

то их произведение равно

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{i} = (2 \times 1) + (3 \times 4) + (4 \times 2) + (5 \times 3) = 2 + 12 + 8 + 15 = 37 \qquad (5)$$

Умножение 2-матриц с использованием «правила стрелки»

2-матрица умножается на 1-матрицу расчленением *2-матрицы на 1-матрицы и последующим умножением каждой из полученных 1-матриц поочередно на данную 1-матрицу.*

Поскольку 2-матрица может быть расчленена на 1-матрицы двумя различными способами, то вводится «правило стрелки», согласно которому стрелка будет указывать направление, по которому 2-матрица «разрезается» на 1-матрицы. Например, пусть дана 2-матрица **z** и 1-матрица **i**

$$\mathbf{z} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{array} \\ \begin{array}{c} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{i} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6)$$

Их произведение **z** · **i** находится после членения **z** на горизонтальные строки.

$$\mathbf{z} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{array} \\ \boldsymbol{a} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{b} & \begin{bmatrix} 9 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{c} & \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{i} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (7)$$

и затем каждая строка умножается на данную 1-матрицу:

$$\begin{aligned} & (3 \times 2) + (4 \times 3) + (2 \times 4) = 6 + 12 + 8 = 26 \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{i} = {} & (9 \times 2) + (1 \times 3) + (5 \times 4) = 18 + 3 + 20 = 41 \qquad (8) \\ & (6 \times 2) + (7 \times 3) + (8 \times 4) = 12 + 21 + 32 = 65 \end{aligned}$$

Каждое произведение дает обычное число, а всего три числа, которые могут быть расположены в первоначальном порядке, что дает 1-матрицу:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{e} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 26 & 41 & 65 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (9)$$

Таким образом, *произведение 2-матрицы на 1-матрицу есть 1-матрица.*

Конечно, в фактических вычислениях нет необходимости переписывать 2-матрицу в виде набора 1-матриц. *Достаточно нарисовать стрелку в направлении, в котором предполагается «разрезание» 2-матрицы.*

Умножение 2-матриц по правилу суммирования

В индексном обозначении произведение матриц представляется суммированием

$$A \cdot B = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta\gamma} = C_{\alpha\gamma} = C \qquad (10)$$

причем суммирование эквивалентно правилу стрелки для умножения, описанному выше.
В индексном обозначении правило суммирования применяется (в соответствии с расположением индексов суммирования) точно таким же образом, как расслаиваются отдельные матрицы по направление стрелок.

Произведение любых двух *n*-матриц

Согласно выводам предыдущих разделов, *две n*-матрицы различной размерности умножаются расслоением на 1-матрицы с последующим умножением каждой 1-матрицы первого набора на каждую 1-матрицу второго, причем каждое произведение дает просто число (скаляр). Результирующие величины после расстановки в нужном порядке образуют новую *n*-матрицу. Немые индексы дают направления, по которым расслаиваются исходные *n*-матрицы на 1-матрицы.
Прежде чем расслаивать *n*-матрицы на 1-матрицы, необходимо сначала расслоить их на 2-матрицы, чтобы можно было изобразить их на бумаге. Затем каждую 2-матрицу мысленно расслаивают на 1-матрицы, изображая стрелки по направлению немых индексов, и, наконец, перемножают 1-матрицы. Таким образом, перемножение *n*-матриц любой размерности сводится к перемножению 2-матриц, из которых они состоят.

Определители

I. Чтобы изучать деление на 2-матрицу, надо знать, что такое определитель 2-матрицы.
Каждой 2-матрице (множеству из k^2 чисел) ставится в соответствие единственное число, называемое «*определителем*» (или «детерминантом») 2-матрицы. Определитель образуется из компонент 2-матрицы посредством операций умножения и сложения, выполненных в определенном порядке. Никакие другие *n*-матрицы не имеют определителя.
Когда матрица имеет только две строки и два столбца, ее определитель находят следующим образом:

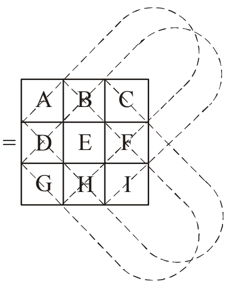
$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline\end{array} \quad \text{Определитель } \mathbf{Z} = |\,\mathbf{Z}\,| = AD — CB. \qquad (11)$$

Например,

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline\end{array} \quad \text{Определитель } \mathbf{Z} = |\,\mathbf{Z}\,| = 2 \times 5 - 4 \times (-3) = \qquad (12)$$
$$= 10 + 12 = 22.$$

Когда матрица имеет *три* строки и столбца, ее определитель находится по следующей схеме:

$$Z=\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline D & E & F \\ \hline G & H & I \\ \hline\end{array}$$

Определитель = 

Определитель $= AEI + BPG + CDH - GEC - DBI - AFH.$ (13)

Например,

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ \hline\end{array} \quad \begin{aligned} &\text{Определитель} = 1\times5\times4 + 2\times6\times2 + \\ &+ 3\times8\times4 - 2\times5\times3 - 4\times2\times4 - 1\times6\times8 = \\ &= 20 + 24 + 96 - 30 - 32 - 48 = 140 - 110 = 30 \end{aligned} \qquad (14)$$

II. С каждой компонентной матрицы связывается число, называемое «минором» компоненты. *Минор любой компоненты определяется после вычеркивания строки и столбца, которым принадлежит данная компонента, вычислением определителя оставшейся матрицы.*

Например, минор компоненты 3 в следующей матрице равен 22:

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ \hline\end{array}\,. \text{ Минор } 3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 4 & 5 & \dots \\ \hline 2 & 8 & \dots \\ \hline\end{array} = 4\times8 - 2\times5 = 22 \qquad (15)$$

Деление на 2-матрицы

I. *Только 2-матрицу (или простой скаляр) можно использовать как делитель.* Деление на другие *n*-матрицы не определено. Деление на 2-матрицу $\mathbf{Z} = Z_{\alpha\beta}$ представляется как умножение на «обратную» ей матрицу $\mathbf{Z}^{-1} = (Z_{\alpha\beta})^{-1}$, следовательно, вообще говоря, в алгебре не существует. Единственным его следом является «обратная» 2-матрица при условии, что определитель 2-матрицы не равен нулю.

II. Обратная матрица находится с помощью следующих шагов:

1) перестановки строк и столбцов (транспонирование);
2) замены каждой компоненты ее минором;
3) умножения, как показано на схеме, каждого минора —1, начиная с +1 в верхнем левом углу:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline + & - & + & \dots & - \\ \hline - & + & - & \text{o} & + \\ \hline + & - & + & \dots & - \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline - & + & - & \dots & + \\ \hline\end{array} \qquad (16)$$

Результатом этих преобразований является «*алгебраическое дополнение*»;

4) деления каждой результирующей компоненты на определитель исходной матрицы.

Вычисление обратной матрицы требует значительного времени, и, вообще говоря, когда матрица имеет более четырех строк и столбцов, то ее обращение должно производиться только в том случае, если компоненты являются известными числами. Если компоненты матрицы Z — алгебраические символы, то ее обращение должно быть обозначено чисто символически в виде $\mathbf{Z}^{-1}$, а каждый численный пример обращения должен выполняться отдельно. Тем не менее, во многих задачах большинство компонент матрицы равно нулю, а в этом случае практически выгодно вычислять обратную матрицу в алгебраических символах.

Ниже показан эффективный способ нахождения обратной матрицы для матриц с большим числом строк и столбцов.

III. В качестве примера найдем обратную следующей матрице:

$\mathbf{Z}$ =

1	2	3
4	5	6
2	8	4

(17)

Ее определитель равен 30.

1. Переставив строки и столбцы, получим

1	4	2
2	5	8
3	6	4

(18)

2. Изменив знаки у соответствующих компонент, имеем

–28	16	–3
–4	–2	6
22	–4	–3

(19)

3. Поделив каждую компоненту на 30 (значение определителя), имеем

$-{}^{14}/_{15}$	${}^{8}/_{15}$	$-{}^{1}/_{10}$
$-{}^{2}/_{15}$	$-{}^{1}/_{15}$	${}^{3}/_{15}$
${}^{11}/_{15}$	$-{}^{2}/_{15}$	$-{}^{1}/_{10}$

(20)

IV. Произведение 2-матрицы $\mathbf{Z}$ на обратную ей $\mathbf{Z}^{-1}$ всегда дает «единичную» матрицу. Таким образом,

$$\boxed{\mathbf{Z \cdot Z^{-1} = 1}} \quad \text{или} \quad \boxed{\mathbf{Z^{-1} \cdot Z = 1}} \tag{21}$$

Этот факт помогает контролировать правильность вычислений при обращении матрицы.

Дифференцирование

I. n-матрица считается продифференцированной по одной переменной, если продифференцирована каждая ее компонента в отдельности. Размерность n-матрицы при этом не изменяется.

Пусть, например, дана 2-матрица, компоненты которой есть функции от θ:

$$Z_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|ccc} & & \beta & \\ \alpha & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ c & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \tag{22}$$

Дифференцируя каждую компоненту по θ, получаем:

$$\frac{\partial Z_{\alpha\beta}}{\partial\theta} = \begin{array}{c|ccc} & & \beta & \\ \alpha & a & b & c \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ c & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{array} \tag{23}$$

II. n-матрица продифференцирована по 1-матрице, если каждая компонента n-матрицы продифференцирована по каждой компоненте 1-матрицы.

Так как после дифференцирования каждая компонента n-матрицы становится 1-матрицей, то *размерность результирующей матрицы увеличивается на единицу.* Таким образом, 2-матрица становится 3-матрицей и т. д.

Пусть, например, дана n-матрица, которую нужно продифференцировать:

$$e_\alpha = \begin{array}{|ccc} \alpha & & \\ a & b & c \\ \hline \cos x_m & 4 & \sin x_k \end{array} \tag{24}$$

и 1-матрица:

$$x_\beta = \begin{array}{|ccc} \beta & & \\ m & n & k \\ \hline x_m & x_n & x_k \end{array} \tag{25}$$

Найдем $\partial e_\alpha / \partial x_\beta = A_{\alpha\beta}$.

Дифференцируем каждую компоненту матрицы:

1) по

$$x_m = \begin{array}{c|ccc} & \alpha & & \\ & a & b & c \\ \hline m & -\sin x_m & 0 & 0 \end{array} \quad (26)$$

2) по

$$x_n = \begin{array}{c|ccc} & \alpha & & \\ & a & b & c \\ \hline n & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(27)

3) по

$$x_k = \begin{array}{c|ccc} & \alpha & & \\ & a & b & c \\ \hline k & 0 & 0 & \cos x_k \end{array} \quad (28)$$

Следовательно, результирующая n-матрица равна

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\beta} = A_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|ccc} & \alpha & & \\ \beta & a & b & c \\ \hline m & -\sin x_m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & \cos x_k \end{array} \quad (29)$$

III. В общем случае любая n-матрица дифференцируется по любой другой n-матрице дифференцированием каждой 1-й компоненты по каждой 2-й компоненте. Размерность результирующей n-матрицы есть сумма размерностей исходных матриц.
Например,

$$\frac{\partial A_{\alpha\beta\gamma}}{\partial B_{\delta\varepsilon}} = C_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} \quad \text{или} \quad \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} = B_\alpha . \quad (30)$$

В прямом обозначении дифференцирование записывается в виде $\partial\mathbf{e}/\partial\mathbf{x} = \mathbf{A}$.

Интегрирование

n-матрица считается проинтегрированной по одной переменной, если каждая из ее компонент проинтегрирована по этой переменной. Например, если

$$A_\alpha = \begin{array}{c|ccc} \alpha & & & \\ & a & b & c \\ \hline & 2 & \sin\theta & \sin\theta \end{array} \quad (31)$$

то

$$\int A_\alpha \partial\theta = B_\alpha = \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline & 2\,\theta + A & -\cos\theta + B & \sin\theta + C \end{array} \qquad (32)$$

1-матрица считается проинтегрированной по другой 1-матрице, если каждая компонента первой проинтегрирована по соответствующей компоненте второй и затем проведено *суммирование* по немым индексам. Например, если

$$A_\alpha = \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline & \cos x_a & 3 & \sin x_c \end{array} \qquad (33)$$

$$dx_\alpha = \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline & dx_a & dx_b & dx_c \end{array}\,, \qquad (34)$$

то

$$\int A_\alpha dx_\alpha = \int A_a dx_a + \int A_b dx_b + \int A_c dx_c = \int \cos x_a dx_a +$$
$$+ \int 3dx_b + \int \sin x_c dx_c = (\sin x_a + A) + (3x_b + B) - (\cos x_c + C). \qquad (35)$$

2. Разложение в степенной ряд

I. Для иллюстрации использования постулата первого обобщения в задачах, где встречаются 3- и *n*-матрицы более высоких размерностей, рассмотрим разложение в степенной ряд нескольких функций от нескольких переменных. Разложение переменных в степенной ряд необходимо тогда, когда система уравнений не поддается решению другим способом.

Начнем с разложения в ряд одной функции от одной переменной, а затем шаг за шагом повторим этот процесс в *n*-матрицах для нескольких функций от нескольких переменных.

II. Любая плоская кривая $y=f(x)$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots, \qquad (36)$$

где коэффициенты $A, B, C, D, \ldots$ — известные или неизвестные величины (предполагается, что некоторые условия, оговоренные в учебниках, выполнены).

III. Кривая в трехмерном пространстве задается пересечением двух поверхностей:

$$y_a = f_a(x_a, x_b),$$
$$y_b = f_b(x_a, x_b) \qquad (37)$$

Каждая из зависимых переменных y_a и y_b может быть представлена разложением в степенной ряд по независимым переменным x_a и x_b:

$$\begin{aligned} y_a = {} & A_a + (B_{aa}x_a + B_{ab}x_b) + \\ & + (C_{aaa}x_a^2 + C_{aab}x_ax_b + C_{aba}x_bx_a + C_{abb}x_b^2) + \\ & + (D_{aaaa}x_a^3 + D_{aaab}x_a^2x_b + D_{aaba}x_a^2x_b + D_{aabb}x_ax_b^2) + \\ & + (D_{abaa}x_bx_a^2 + D_{abab}x_ax_b^2 + D_{abba}x_ax_b^2 + D_{abbb}x_b^3) + \end{aligned} \qquad (38)$$

$$+ (E_{aaaaa}x_a^4 + E_{aaaab}x_a^3x_b + \ldots)$$

Коэффициенты переменных, такие, как D_{abaa}, известные или неизвестные величины. Аналогичное уравнение можно написать и для y_b:

$$\begin{gathered}
y_b = A_b + (B_{ba}x_a + B_{bb}x_b) + \\
+ (C_{baa}x_a^2 + C_{bab}x_ax_b + C_{bba}x_bx_a + C_{bbb}x_b^2) + \\
+ (D_{baaa}x_a^3 + D_{baab}x_a^2x_b + D_{baba}x_a^2x_b + D_{babb}x_ax_b^2 + \\
+ D_{bbaa}x_bx_a^2 + D_{bbab}x_ax_b^2 + D_{bbba}x_ax_b^2 + D_{bbbb}x_b^3) + \\
+ (E_{baaaa}x_a^4 + E_{baaab}x_a^3x_b + \ldots)
\end{gathered} \tag{39}$$

Если вместо двух функций от двух переменных имеется n функций от n переменных (с действительными переменными), то

$$\begin{aligned}
&y_a = f_a\,(x_a, x_b, \ldots x_n), \\
&y_b = f_b\,(x_a, x_b, \ldots x_n), \\
&y_c = f_c\,(x_a, x_b, \ldots x_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_n = f_n\,(x_a, x_b, \ldots x_n),
\end{aligned} \tag{40}$$

и мы получим n таких степенных рядов, подобных рассмотренным выше, причем в каждой скобке вместо 2^1, 2^2, 2^3, ..., членов будет n^1, n^2, n^3,... членов.

IV. Чтобы представить n обычных уравнений как одно матричное уравнение, определим следующие n-матрицы:

1) все зависимые переменные расположим в строку, образующую 1-матрицу:

$$\begin{array}{r|ccccc}
\alpha & a & b & c & \ldots & n \\
\hline
y_\alpha = & y_a & y_b & y_c & \ldots & y_n
\end{array}\;; \tag{41}$$

2) все независимые переменные расположим в строку, образующую 1-матрицу:

$$\begin{array}{r|ccccc}
\alpha & a & b & c & \ldots & n \\
\hline
x_\alpha = & x_a & x_b & x_c & \ldots & x_n
\end{array}\;; \tag{42}$$

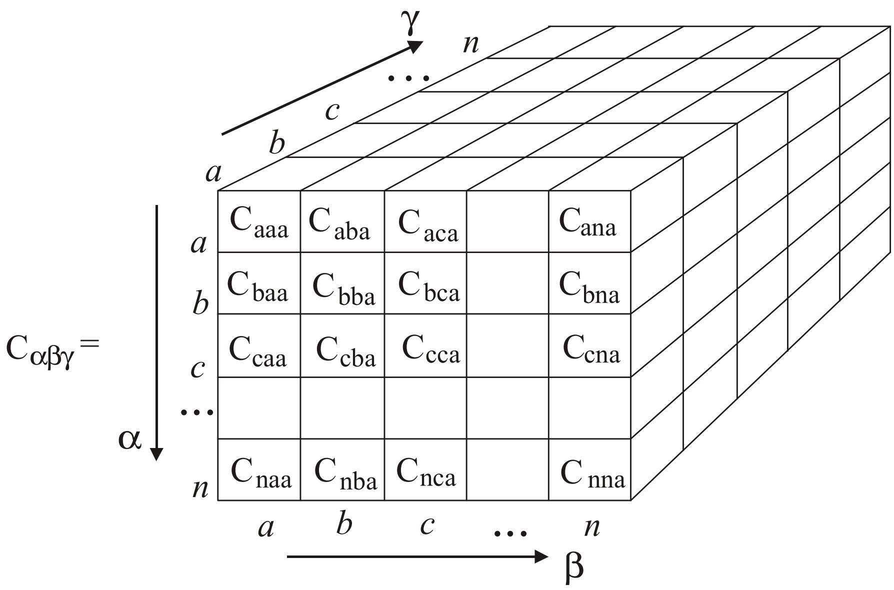
3) все коэффициенты A расположим в 1-матрицу:

$$\begin{array}{r|ccccc}
\alpha & a & b & c & \ldots & n \\
\hline
A_\alpha = & A_a & A_b & A_c & \ldots & A_n
\end{array}\;; \tag{43}$$

4) все коэффициенты B при x_α расположим в квадрат, образуя 2-матрицу:

$$B_{\alpha\beta} = \quad \begin{array}{c|ccccc}
 & \beta & & & & \\
\alpha & a & b & c & \ldots & n \\
\hline
a & B_{aa} & B_{ab} & B_{ac} & \ldots & B_{an} \\
b & B_{ba} & B_{bb} & B_{bc} & \ldots & B_{bn} \\
c & B_{ca} & B_{cb} & B_{cc} & \ldots & B_{cn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
n & B_{na} & B_{nb} & B_{nc} & \ldots & B_{nn}
\end{array}\;; \tag{44}$$

5) все коэффициенты C при $x_\alpha x_\beta$ расположим в куб, образуя 3-матрицу:



(45)

6) все коэффициенты D при $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ располагаются в n кубов, образуя 4-матрицу $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Все коэффициенты E образуют 5-матрицу $E_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ и т. д.

V. *Через эти n-матрицы разложение n функций n переменных, в степенной ряд записывается в одно матричное уравнение*

$$y_\alpha = A_\alpha + B_{\alpha\beta}x_\beta + C_{\alpha\beta\gamma}x_\beta x_\gamma + D_{\alpha\beta\gamma\delta}x_\beta x_\gamma x_\delta + E_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}x_\beta x_\gamma x_\delta x_\varepsilon + \ldots \tag{46}$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и ряд одной переменной, но отличается от него тем, что каждая величина заменена n-матрицей; n-я степень переменной, например x^4, заменена произведением n членов; $x_\beta x_\gamma x_\delta x_\varepsilon$.

Заметим, что в этом уравнении:

1) каждый член является 1-матрицей, т. е. в каждом члене имеется только один свободный индекс, все остальные индексы являются немыми;
2) каждый свободный индекс в каждом члене уравнения слева и справа обозначается буквой α;
3) в каждом члене n-матрица умножается на 1-матрицу x_α несколько раз; например, 3-матрица $C_{\alpha\beta\gamma}$ умножается сначала на 1-матрицу x_γ, образуя 2-матрицу $C_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma = F_{\alpha\beta}$, затем 2-матрица $F_{\alpha\beta}$ умножается снова на 1-матрицу x_β, $F_{\alpha\beta}x_\beta = [C_{\alpha\beta\gamma}\, x_\gamma]x_\beta$, давая 1-матрицу G_α. Каждый член уравнения является такой 1-матрицей, как показано на рис. 5.

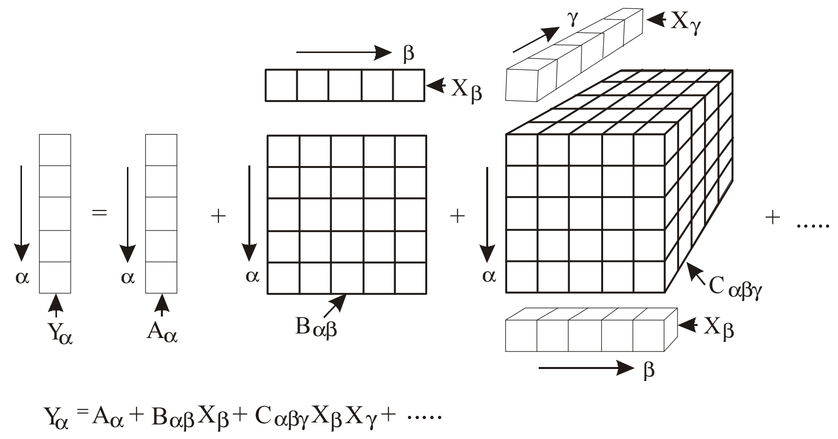


Рис. 5. Разложение в степенной ряд в форме *n*-матриц

3. Обращенный степенной ряд

I. Для демонстрации операций с 3-матрицами рассмотрим три члена приведенного выше ряда, заменяя *y* на *e* и *x* на *i*:

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta} i_\beta + C_{\alpha\beta\gamma} i_\beta i_\gamma + \ldots \tag{47}$$

Предположим, что компоненты $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$ известны, так же, как компоненты e_α (которые представляют, например, приложенные напряжения в нелинейной системе). Задача состоит в разрешении этого уравнения относительно неизвестного i_α, т. е. нужно выразить i_α как функцию от $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$ и e_α.

Неизвестную i_β можно выразить через e_α с помощью степенного ряда (называемого «обращенным» рядом):

$$i_\beta = K_{\beta\varepsilon} e_\varepsilon + M_{\beta\varepsilon\sigma} e_\varepsilon e_\sigma + \ldots \tag{48}$$

где коэффициенты $K_{\beta\varepsilon}$ и $M_{\beta\varepsilon\sigma}$ являются неизвестными функциями введенных ранее известных коэффициентов $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$. Задача состоит в том, чтобы выразить *K* и *M* в виде явной функции от *B* и *C*.

II. *Следуя постулату первого обобщения, решим сначала эту задачу для обычной скалярной величины.* Другими словами, решим сначала следующую задачу: дано разложение в степенной ряд

$$\boldsymbol{e} = B\cdot\boldsymbol{i} + C\cdot\boldsymbol{i}^2 + \ldots, \tag{49}$$

надо найти неизвестную *i*, т. е. в обращенном ряде

$$i = Ke + Me^2 + \ldots \tag{50}$$

выразить неизвестные *K* и *M* как явную функцию от известных *B и C.* Порядок действий состоит из следующих этапов:

1) Подставить второе уравнение в первое:

$$e = B(Ke + Me^2) + C(Ke + Me^2)^2 + \ldots. \tag{51}$$

Поскольку мы будем пренебрегать всеми членами, в которых степень больше двух, то уравнение приводится к виду

$$e = BKe + BMe^2 + CK^2e^2 + \ldots, \tag{52}$$

$$e = BKe + (BM + CK^2)e^2 + \ldots. \tag{53}$$

2) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, т. е. при e и e^2 с каждой стороны уравнения, получим

$$1 = BK, \tag{54}$$

$$0 = BM + CK^2. \tag{55}$$

3) Решаем эти два уравнения относительно неизвестных K и M:

$$K = B^{-1} \tag{56}$$

$$M = -\,C(B^{-1})^3 = -\,CK^{-3} \tag{57}$$

4) Таким образом, значение i через e, B, C выражается следующим способом:

$$i = B^{-1}e - C(B^{-1})^3e^2 \tag{58}$$

или

$$i = Ke - CK^3e^2, \tag{59}$$

где $K = B^{-1}$.

III. Тот же самый порядок с теми же этапами мы повторяем, заменяя каждую величину n-матрицей.

1. Подставим значение i_β из уравнения (48) в уравнение (47):

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta}(K_{\beta\varepsilon}e_\varepsilon + M_{\beta\varepsilon\sigma}e_\varepsilon e_\sigma) + C_{\alpha\beta\gamma}(K_{\beta\varepsilon}e_\varepsilon + M_{\beta\varepsilon\sigma}e_\varepsilon e_\sigma)(K_{\gamma\omega}e_\omega + M_{\gamma\omega\pi}e_\omega e_\pi). \tag{60}$$

Следует заметить, что в процессе этой подстановки свободный индекс обозначен сначала как β, затем как γ. Аналогично в последнем случае, чтобы избежать путаницы при подстановке (i_β два раза подряд, замена немых индексов сделана следующим образом:

$$i_\gamma = K_{\gamma\omega}e_\omega + M_{\gamma\omega\pi}e_\omega e_\pi \tag{61}$$

Пренебрегая степенями e_ε выше второй, приходим к уравнению

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta}K_{\beta\varepsilon}e_\varepsilon + B_{\alpha\beta}M_{\beta\varepsilon\sigma}e_\varepsilon e_\sigma + C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\varepsilon}K_{\gamma\omega}e_\varepsilon e_\omega. \tag{62}$$

Выносим за скобку $e_\varepsilon e_\sigma$:

$$e_\alpha = B_{\alpha\beta}K_{\beta\varepsilon}e_\varepsilon + (B_{\alpha\beta}M_{\beta\varepsilon\sigma} + C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\varepsilon}K_{\gamma\sigma})e_\varepsilon e_\sigma. \tag{63}$$

2. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях e_ε и $e_\varepsilon e_\sigma$ в обеих частях уравнения (представляем e_α в виде $e_\varepsilon I_{\varepsilon\alpha}$, где $I_{\varepsilon\alpha}$ – единичная матрица):

$$I_{\varepsilon\alpha} = B_{\alpha\beta}K_{\beta\varepsilon}; \tag{64}$$

$$0 = B_{\alpha\delta}M_{\delta\varepsilon\sigma} + C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\varepsilon}K_{\gamma\sigma}. \tag{65}$$

3. Решаем эти два уравнения относительно неизвестных $K_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta\gamma}$:

$$K_{\beta\varepsilon} = I_{\varepsilon\alpha}(B_{\alpha\beta})^{-1} = (B_{\varepsilon\beta})^{-1}, \tag{66}$$

$$M_{\delta\varepsilon\sigma} = -\,(C_{\alpha\beta\gamma}K_{\beta\varepsilon}K_{\gamma\alpha})(B_{\alpha\delta})^{-1} = -\,C_{\alpha\beta\gamma}K_{\delta\alpha}K_{\beta\varepsilon}K_{\gamma\sigma}. \tag{67}$$

Эти матричные уравнения такие же, как и соответствующие им обычные уравнения (56) и (57). *Таким образом, матрица $K_{\alpha\beta}$ находится обращением матрицы $B_{\alpha\beta}$, а 3-матрица $M_{\alpha\beta\gamma}$ находится умножением 3-матрицы $C_{\alpha\beta\gamma}$ на матрицу $K_{\alpha\beta}$ три раза подряд в порядке,* указываемом индексами, и полученный результат берется с отрицательным знаком.
Поскольку $(B_{\alpha\beta})^{-1} = K_{\beta\alpha}$, т. е. при обращении матрицы порядок индексов изменяется, три матрицы $K_{\alpha\beta}$ в последнем выражении имеют свободный индекс на разных позициях. Таким образом, в $K_{\delta\alpha}$ свободным индексом является первый индекс, в то время как в $K_{\beta\varepsilon}$ и $K_{\gamma\sigma}$ — вторые индексы.

4. Следовательно, значение i_α как функции от $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$ таково:

$$i_\alpha = K_{\alpha\beta}e_\beta - C_{\gamma\delta\varepsilon}K_{\alpha\gamma}K_{\delta\pi}K_{\varepsilon\sigma}e_\pi e_\sigma, \tag{68}$$

где $K_{\alpha\beta} = (B_{\beta\alpha})^{-1}$.

Нужно заметить, что без применения понятия *n*-матрицы процедура обращения системы уравнений, выраженных степенными рядами, является чрезвычайно трудоемкой. *Из-за отсутствия правила, которое дается в выражении* (67), каждый раз, когда нужно обратить систему уравнений, с начала и до конца должна быть проделана вся аналитическая работа. Если обращение степенного ряда является только одним этапом в каком-либо исследовании, то редко кто отважится провести этот анализ с использованием обычной символики: после нескольких первых шагов механические трудности при операциях с многочисленными членами становятся непреодолимыми, не говоря уже о том, что в голове нужно держать содержание задачи, ясно обозревать весь анализ и синтез.

4. Тензор преобразования

I. Когда задана *n*-матрица, представляющая компоненты геометрического объекта в некоторой системе координат, то конкретные оси показываются фиксированными индексами у каждой строки, столбца или слоя и т. п. *n*-матрицы.

Каждая другая система координат определяется с помощью 2-*матрицы* $C = C_{\alpha'}^{\alpha}$, *называемой* «*матрицей преобразования*», которая и показывает, чем новая система координат отличается от исходной системы координат. Поскольку каждая новая система имеет свою собственную матрицу преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$, связывающую ее с исходной системой координат, то, следовательно, с каждым геометрическим объектом ассоциируется целая группа матриц преобразования. *Полная совокупность всех матриц преобразования образует одну сущность* — «*тензор преобразования*» $C_{\alpha'}^{\alpha}$.

Формулу, с помощью которой определяют компоненты геометрического объекта во всех других системах координат, назовем «*формулой преобразования*», или «*уравнением преобразования*», или «*законом преобразования*».

II. В терминах этих новых понятий постулат второго обобщения может быть сформулирован так:

Если известно матричное уравнение явления с любым числом степеней свободы, имеющего место в частной системе (или системе отсчета), то это же уравнение справедливо для бесконечного разнообразия подобных систем (или систем отсчета), в которых имеет место то же самое явление, если каждую n-матрицу заменить геометрическим объектом. Компоненты каждого геометрического объекта в любой новой системе координат находят по компонентам в исходной системе координат формальной процедурой посредством «формулы преобразования» с помощью «тензора преобразования» $C_{\alpha'}^{\alpha}$.

III. Следовательно, анализ любой новой системы состоит из следующих шагов (если инвариантное уравнение для одной системы координат уже выведено):

1) найти матрицу преобразования **C,** показывающую отличие новой системы координат от старой;
2) найти новые компоненты геометрических объектов в новой системе координат посредством формулы преобразования, соответствующей каждому геометрическому объекту.

Этапы анализа

1) *устанавливается* уравнение поведения, справедливое для каждого члена группы;
2) над уравнением производятся преобразования, различные для каждого случая. Для *преобразования одно инвариантное уравнение поведения обычно подразделяется на несколько инвариантных уравнений;*
3) *находятся,* если они есть, неизвестные величины.

I. *Этап установления соотношения между старой и новой системами является центральным местом в установлении законов поведения новой системы. Как только это соотношение получено, оставшаяся работа — получение уравнений поведения новой системы из известных уравнений старой системы* (или нахождение любого другого свойства новой системы) — *является чисто автоматической.*
Систему линейных уравнений можно выразить в терминах геометрических объектов аналогично системе линейных уравнений $\mathbf{e} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}$:

$$\boxed{\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}'} \qquad \boxed{i^m = C^m_{m'} \cdot i^{m'}} \tag{69}$$

где

$$\mathbf{i} = \begin{array}{cc} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline i^a & i^b \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} m & a & b \\ \hline i^m = & i^a & i^b \end{array} \tag{70}$$

$$\mathbf{i}' = \begin{array}{cc} \mathbf{a'} & \mathbf{b'} \\ \hline i^{a'} & i^{b'} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} m' & a' & b' \\ \hline i^{m'} = & i^{a'} & i^{b'} \end{array} \tag{71}$$

Коэффициенты при новых переменных образуют матрицу, называемую «матрицей преобразования» (или, точнее, «компоненты тензора преобразования по *двум* системам координат»).

$$\mathrm{C} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a'} & \mathbf{b'} \\ \hline \mathbf{a} & 1 & 0 \\ \mathbf{b} & -1 & 1 \end{array} \qquad C^m_{m'} = \begin{array}{c|cc} m' & a' & b' \\ \hline m\ \ a & 1 & 0 \\ b & -1 & 1 \end{array} \tag{72}$$

Эта двумерная матрица образует костяк тензорного анализа. Несмотря на то, что эта матрица содержит только +1, −1 и 0, они являются значениями компонентов якобиана преобразования координат. Это преобразование сохраняет неизменной мощность.
Она показывает соотношение между старыми и новыми переменными. Причина использования верхних и нижних индексов будет указана ниже.

II. Процесс получения матрицы преобразования $C^m_{m'}$, для новой системы состоит в таком случае из трех этапов:

1) принятие решения о том, что будет называться новыми потоками $i^{m'}$ в новой системе;
2) получение линейных соотношений между старыми потоками i^m и новыми потоками $i^{m'}$.

Другими словами, старые потоки пишем в левых частях уравнений, а некоторые линейные комбинации новых потоков — в правых частях;

3) из коэффициентов при новых потоках образуем матрицу, которая является требуемой «матрицей преобразования» $C_{m'}^{m}$.

Тензор обратного преобразования находится вычислением матрицы, обратной. Это обозначается заменой верхних индексов нижними и наоборот, т. е.

$$C^{-1} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{a}' & 1 & 0 \\ \mathbf{b}' & 1 & 1 \end{array}, \qquad C_{m'}^{m} = \begin{array}{c|cc} m & a & b \\ \hline m' & & \\ a' & 1 & 0 \\ b' & 1 & 1 \end{array} \tag{73}$$

5. «Инвариантность форм»

I. Подлежащая исследованию проблема состоит в следующем. Дана «примитивная сеть». С ней связаны следующие понятия:

1) геометрические объекты;
2) инвариантные уравнения.

Геометрические объекты и уравнения известны.

Дана другая сеть. С этой сетью связаны точно такие же понятия, как и с данной сетью. Однако ни одна из новых компонент геометрических объектов до сих пор не найдена (поэтому никакие новые уравнения не могут быть установлены), за исключением единственного соотношения, полученного между старыми и новыми переменными,

$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}', \qquad i^{m} = C_{m'}^{m} \cdot i^{m'},$$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{i}, \qquad i^{m'} = C_{m}^{m'} \cdot i^{m}, \tag{74}$$

определяющего компоненты тензора преобразований, которого, однако, недостаточно для определения новых компонентов геометрических объектов, а, следовательно, и новых уравнений.

Необходимо еще найти «формулу преобразования» одного геометрического объекта в другой.

II. Чтобы установить формулу преобразования геометрического объекта, *необходимо найти, по крайней мере, одну физическую величину, которая одинакова для обеих систем, т. е. которая не изменяется при изменении системы координат.* Математическое представление «инвариантности» этой физической величины служит вторым соотношением, необходимым для нахождения формул преобразования.

Это второе соотношение устанавливается, если принять, что, когда элементы примитивной сети соединяются, полная мощность, потребляемая всей системой, остается «инвариантной», неизменной, т. е.

$$N = N' \tag{75}$$

или, на языке тензорного анализа, входная мощность N есть инвариант относительно преобразования $C_{m'}^{m}$.

Ковариантные и контравариантные величины

Величины (геометрические объекты), которые при изменении системы координат преобразуются по тому же закону, что и векторы базиса, называются **ковариантными**, т. е. совместно изменяющимися.
Величины, которые при изменении системы координат изменяются по закону, обратному закону изменения векторов базиса, называются **контравариантными**, или противоположно изменяющимися.
Таким образом, компоненты векторов базиса ковариантные, а компоненты произвольного вектора — контравариантные.
В общем случае геометрический объект является функцией многих переменных, каждая из которых имеет свои компоненты в данной системе отсчета. Такой объект представляется в одной системе отсчета многомерной матрицей, число измерений которой определяется числом переменных, а порядок — размерностью пространства.
Компоненты одних переменных при изменении системы координат преобразуются ковариантно, других — контравариантно. **Ковариантные компоненты (преобразуются матрицей C_β^{α}) обозначают *нижними* индексами, а контравариантные (преобразуемые матрицей $(C_\beta^{\alpha})^{-1}{}_t = A^\beta{}_\alpha$) — *верхними*.**
Компоненты базисного пути в сети — это ковариантный объект с одной переменной. Компоненты произвольного вектора-пути — контравариантный объект с одной переменной. Матрица преобразования — геометрический объект с двумя переменными.

6. Мультитензоры

Формирование еще более сложных сущностей

Когда организация совокупности «атомов» образует новую сущность — «молекулу», то *результатом организации является возникновение у «молекулы» новых свойств*, которыми не обладали составляющие молекулу атомы. Процесс организации, однако, продолжается *по нескольким направлениям*, формируя все более и более сложные сущности.
Группа молекул может быть организована в коллоидную частицу, фильтрующийся вирус, кристалл, и каждая из этих сущностей имеет свойства, которых не имели образующие их молекулы. Коллоидные частицы могут быть организованы в клетки, клетки — в органы, органы — в растения или организм животного (включая человека).
Сообщества людей образуют различные организации, из которых формируется все общество.
Организация совокупности математических выражений в «геометрические объекты», в «тензоры» различной валентности является только первым шагом в организованном формировании еще более сложных математических сущностей.
Совокупность тензоров, *имеющих различную валентность*, организуется в сущность с еще более сложной структурой, которая называется «*мультитензором*».
Тензор, *содержащий два* или *более множеств индексов* (каждое множество индексов относится к различным множествам систем координат), *называется* «*мультитензором*».
Основная буква может иметь различное число индексов в различных координатах. Например, $z_{\alpha\beta}{}^{pqr}$ является ковариантным тензором валентности два в α-координатах, но он является контравариантным тензором валентности три в p-координатах. Матрицы преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и $C_{p'}^{p}$ принадлежат к различным группам.

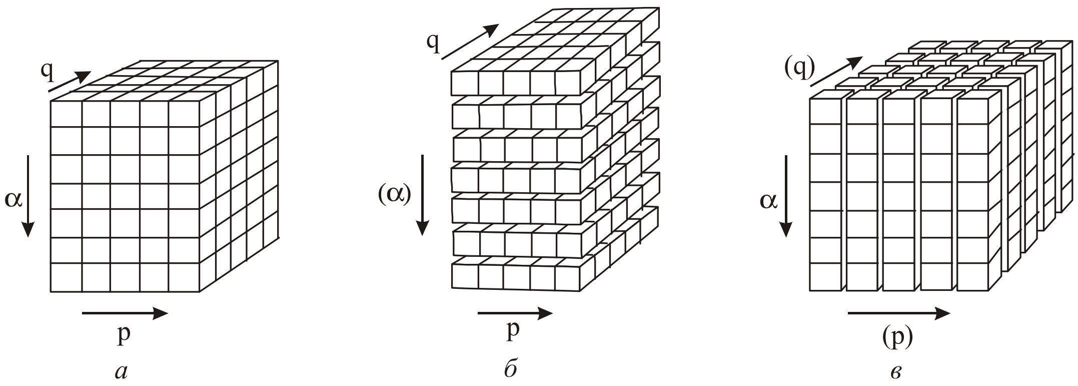


Рис. 6. Несколько представлений мультитензора:
а) мультитензор $\mathbf{A}^{\alpha p q}$; *б)* набор k 2-тензоров $\mathbf{A}^{(\alpha) pq}$; *в)* набор k векторов $\mathbf{A}^{\alpha(p)(q)}$

Кроме того, основная буква может быть тензором в одних координатах, геометрическим объектом в других и n-матрицей в третьем множестве координат.

7. Анализ и синтез сетей

Типы задач

I. Задачи, возникающие при изучении сетей, можно разбить на две основные группы:

1) *Дана сеть*, *нужно установить ее свойства*. Такие задачи встречаются в анализе систем.
2) *Даны свойства сети*, *требуется найти саму сеть*. Такие задачи встречаются в «*синтезе сетей*».

II. Анализ сетей может включать простые или сложные действия с тензорными уравнениями в зависимости от рассматриваемой задачи. Простыми действиями являются:

1) при заданной сети и некоторых потоках найти потоки, мощность в других частях сети;
2) изменено значение некоторых потоков сети, найти изменения в различных частях сети.

Более сложными действиями являются:

3) сделаны такие изменения, что отклик сети является *максимальным* или *минимальным*.
4) изменения, которые надо сделать, зависят от данных, которые еще надо найти.

III. *Огромное преимущество формулировки и решения сетевых задач в терминах тензорных уравнений заключается в том*, *что каждый тип задач можно изучить раз и навсегда независимо от способа соединения элементов. Анализ нужно провести только однажды*, *и конечный результат можно использовать для каждого конкретного случая одним и тем же способом автоматически.*

При обычном способе анализа как вывод уравнений, так и весь метод следует повторять для каждого отдельного случая, возникающего в инженерной практике. Поскольку в обычном анализе огромное количество элементов, огромное разнообразие соединений и гипотетических координатных систем затрудняют задачу, очень часто для каждого конкретного случая требуется отдельный метод решения. Во многих случаях анализ просто прекращается уже после первых шагов из-за механических трудностей оперирования с огромным числом уравнении.

Заключение

Этот раздел является логическим продолжением и заключительным этапом в рассмотрении элементов метода тензорного анализа Г. Крона, минимально необходимых для проектирования любых сложных систем и, в том числе, при реконструкции существующей системы, при переходе от «старой» системы в «новую» систему координат устойчивого развития.
Были рассмотрены элементы алгебры n-матриц, вопросы разложения в степенной ряд и его обращение.
Мы показали на самом простом примере понятие «тензор преобразования» и дали простую схему его представления.

Выводы

Мы изложили лишь некоторые элементы тензорного анализа Г. Крона, дающие возможность лучше понять суть метода преобразования различных систем, которые были предметом рассмотрения практически во всех разделах портала. При этом вниманию пользователя предложены лишь самые простые правила. Мы не стали излагать множество специальных оригинальных способов, которые могут быть востребованы в процессе проектирования. В их числе правила сингулярных преобразований, компаунд-тензоры, формулы редукции, конечно и бесконечно групповые спинорные преобразования, узловые и ортогональные сети, метрические тензоры и мультитензоры, компаунд-сети, тензоры анализа и синтеза сетей и многие другие. Со всеми этими специальными вопросами лучше знакомиться непосредственно по работам Г. Крона и многочисленным учебникам, изданным, к сожалению, только за рубежом.